

文章编号:1000-8055(2012)08-1752-06

金属橡胶隔振器产生混沌的解析预测

唐 果¹, 陈安华², 郭源君²

- (1. 湖南科技大学 数学与计算科学学院, 湖南 湘潭 411201;
2. 湖南科技大学 机械设备健康维护湖南省重点实验室, 湖南 湘潭 411201)

摘 要: 在考虑金属橡胶隔振系统的非线性刚度和非线性迟滞恢复力的基础上,建立了金属橡胶隔振器的非线性动力学方程.根据非线性振动理论,得出了系统在弱非线性情况下的一次谐波慢变参数的平均化方程;推出了谐波慢变参数状态方程的离散化映射,获得了金属橡胶隔振器出现混沌的解析条件.

关 键 词: 金属橡胶; 隔振器; 混沌; 参数条件; 解析预测

中图分类号: V214.9; TH17; TH113

文献标志码: A

Chaotic prediction of metal rubber damper for occurred chaos

TANG Guo¹, CHEN An-hua², GUO Yuan-jun²

- (1. School of Mathematics and Computing Science,
Hunan University of Science and Technology, Xiangtan Hunan 41120, China;
2. Hunan Provincial Key Laboratory of Health Maintenance for Mechanical Equipment,
Hunan University of Science and Technology, Xiangtan Hunan 41120, China)

Abstract: The nonlinear dynamics equation of a metal rubber damper with nonlinear stiffness and nonlinear hysteresis resilience was proposed. According to non-linear vibration theory, the average equation of slowly-varying parameters was obtained in the weakly non-linear case. The discrete mapping of the status equation of harmonic wave slowly-varying parameters was developed. The analytical condition of occurred chaos for metal rubber damper was obtained.

Key words: metal rubber; damper; chaos; parameter condition; analytical prediction

金属橡胶是因为它具有橡胶的弹性而得名,从其内部组成来分析,它仍是金属,是将金属丝卷成螺旋形,以使它们相互勾联嵌合,在经过加工成型为一种类似于橡胶分子结构的网状多孔的结构.通过对它的这种特殊结构的研究,可以发现金属橡胶表现出不同的力学性质,它是一种很好的阻尼隔振材料,而该种材料具有在真空中不挥发、能耐高温和低温、结构轻、抗老化、耐腐蚀等优点,所以用它制成的金属橡胶隔振器的隔振性能强,适合恶劣环境下(高温、低温、真空等)的阻尼

减振.因此金属橡胶被广泛应用于航空航天和汽车等工业领域,以其代替橡胶做减振、阻尼和密封件,对提高航空航天产品的寿命、可靠性有很大的好处.从而也就引起了国内外的许多研究者对它的研究.目前许多研究工作者从理论和实验两方面对金属橡胶隔振系统的阻尼特性^[1-2]、隔振性能^[3-4]、动静态性能^[5-6]、迟滞恢复力模型的建立^[7-10]以及系统的力学和数学建模^[11-15]等问题进行了研究.实际的金属橡胶隔振系统是一个典型的非线性系统,混沌是非线性动力系统的一种特

收稿日期:2011-10-03

网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/11.2297.V.20120830.1200.201208.1752_011.html

基金项目:国家自然科学基金(51175172);湖南省自然科学基金(10JJ6008)

作者简介:唐果(1957—),女,湖南湘潭人,副教授,主要从事应用数学领域的研究.

有的运动形式,所以在利用金属橡胶进行隔振时,必然存在混沌运动.因此,在对金属橡胶进行隔振设计与分析时必须充分考虑隔振材料非线性因素;必须对被动隔振体混沌运动的有关问题进行研究.但是,目前还没有见到关于对金属橡胶隔振系统的混沌运动的研究报道.混沌的解析预测是定性研究混沌的一种有效方法^[16-17],常用的有 Melnikov 方法^[18-21],但由于金属橡胶隔振系统隔振材料的刚度具有渐硬特性,难以通过 Melnikov 方法去进行预测,因此本文通过设立系统的一次谐波解,求出谐波解的慢变参数满足的状态方程,然后对此状态方程平均化、离散化,根据离散动力学的基本理论推出了慢变参数满足的状态方程出现鞍点的条件,得出金属橡胶隔振系统出现混沌的解析条件,为金属橡胶隔振系统设计和隔振效果分析提供可靠的理论依据.

1 金属橡胶隔振体非线性动力学方程

1.1 金属橡胶的迟滞恢复力

通过对金属橡胶的这种特殊结构的研究,发现在加载和卸载时,金属橡胶表现出不同的力学性质,它的力学特性曲线通常是滞迟回线.参考文献^[22-23]指出,金属橡胶的迟滞恢复力可以利用椭圆来近似表示.在参考文献^[24]中已证明

$$f = k_d x_0 \cos \omega t - k_z x_0 \sin \omega t \quad (1)$$

是一个如图 1 所示的椭圆方程.其中参数 k_d 和 k_z 采用非线性最小二乘的方法确定.所以金属橡胶的迟滞恢复力可用方程(1)表示.

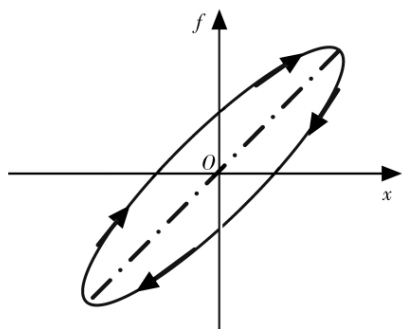


图 1 金属橡胶的迟滞恢复力

Fig. 1 Hysteresis loop of metal rubber

1.2 非线性动力学方程

金属橡胶材料是一种非线性干摩擦阻尼材料,很多参考文献已给出了如图 2 所示的受基础激励的金属橡胶隔振器力学模型^[1,4,13-15],并给出

其运动微分方程为

$$m\ddot{Z} + c(\dot{Z} - \dot{u}) + k(Z - u) + \beta(Z - u)^3 + f(t) = 0 \quad (2)$$

其中 Z 为被隔振体的绝对位移, u 为地基的振动位移, m 为金属橡胶隔振系统的质量, c 为系统的阻尼力系数, k 为系统的线性刚度系数, β 为系统的非线性刚度系数,金属橡胶隔振器系统的非线性弹性力为 $F = k(Z - u) + \beta(Z - u)^3$; $f(t)$ 为金属橡胶隔振器的迟滞恢复力.令

$$x = Z - u, u = u_0 \cos(\omega t) \quad (3)$$

其中 u_0 为地基振动位移振幅,可以通过测量得到.将方程(1)和方程(3)代入方程(2)得

$$m\ddot{x} + \dot{c}\dot{x} + kx + \beta x^3 = (m\omega^2 u_0 - k_d x_0) \cos(\omega t) + k_z x_0 \sin(\omega t) \quad (4)$$

设方程(4)的稳态近似解为

$$x(t) = B \cos(\omega t) \quad (5)$$

在文献^[4]中已指出: $x_0 = B$, 则方程(4)为

$$m\ddot{x} + \dot{c}\dot{x} + (k + k_d)x + \beta x^3 = m\omega^2 u_0 \cos(\omega t) + k_z B \sin(\omega t) \quad (6)$$

并令

$$\eta = \beta/m, 2\xi p_0 = c/m, F_1 = \omega^2 u_0, p_0^2 = (k + k_d)/m, F_2 = Bk_z/m \quad (7)$$

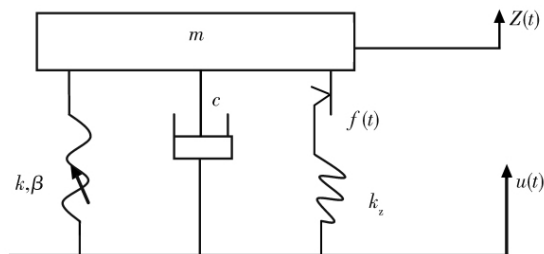


图 2 金属橡胶隔振系统力学模型

Fig. 2 Model of metal rubber isolation system

由方程(7)中的 p_0 可以得知金属橡胶的迟滞恢复力第一部分所引起的非线性项使金属橡胶隔振系统的主共振不是发生在 $\omega = p_0 = \sqrt{k/m}$ 的地方,而是发生在 $\omega = p = \sqrt{(k + k_d)/m}$ 的地方,即使得金属橡胶隔振系统的固有频率向左移动.将方程(7)代入方程(6)得

$$\ddot{x} + 2\xi p_0 \dot{x} + p_0^2 x + \eta x^3 = F_1 \cos(\omega t) + F_2 \sin(\omega t) \quad (8)$$

又令

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}, \tan \alpha = \frac{F_2}{F_1}, F_1 = F \cos \alpha, F_2 = F \sin \alpha$$

方程(8)为

$$\ddot{x} + 2\xi p_0 \dot{x} + p_0^2 x + \eta x^3 = F \cos(\omega t - \alpha) \quad (9)$$

方程(9)为考虑金属橡胶的迟滞恢复力和刚度非线性的金属橡胶隔振器非线性动力学方程的表达式.

2 金属橡胶隔振体产生混沌解析预测

2.1 谐波慢变参数的平均化方程

本文将对具有弱的非线性刚度特征的非线性金属橡胶隔振器产生混沌的参数条件进行解析预测. 由非线性振动理论得知, 当非线性振动系统的非线性项较弱时, 实际观察到的原系统的运动与周期运动十分接近, 只是振幅和初相位随时间缓慢变化. 此时系统方程(9)的一次谐波解可设为

$$x = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) \quad (10)$$

a 和 b 是关于时间的慢变参数. 将方程(10)对 t 求导得

$$\dot{x} = \dot{a} \cos(\omega t) - a \omega \sin(\omega t) + \dot{b} \sin(\omega t) + b \omega \cos(\omega t) \quad (11)$$

由于 a 和 b 是关于时间的慢变参数, 近似有

$$\dot{a} \cos(\omega t) + \dot{b} \sin(\omega t) = 0 \quad (12)$$

所以

$$\dot{x} = b \omega \cos(\omega t) - a \omega \sin(\omega t) \quad (13)$$

$$\ddot{x} = \dot{b} \omega \cos(\omega t) - b \omega^2 \sin(\omega t) - \dot{a} \omega \sin(\omega t) - a \omega^2 \cos(\omega t) \quad (14)$$

将 $\ddot{x}, \dot{x}, x$ 代入方程(9)有

$$\dot{b} \omega \cos(\omega t) - \dot{a} \omega \sin(\omega t) = g(a, b, t) \quad (15)$$

其中

$$g(a, b, t) = -2\xi p_0 [b \omega \cos(\omega t) - a \omega \sin(\omega t)] + (\omega^2 - p_0^2) [a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)] - \eta [a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)]^3 + F \cos(\omega t - \alpha) \quad (16)$$

由方程(12)和方程(15)解得

$$\begin{cases} \dot{a} = -\frac{1}{\omega} g(a, b, t) \sin(\omega t) \\ \dot{b} = \frac{1}{\omega} g(a, b, t) \cos(\omega t) \end{cases} \quad (17)$$

设 $\theta = \omega t$, 利用平均法对方程(17)右边在 $[0, 2\pi]$ 内进行平均, 则

$$\begin{cases} \dot{a} = -\frac{1}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} g(a, b, t) \sin\theta d\theta \\ \dot{b} = \frac{1}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} g(a, b, t) \cos\theta d\theta \end{cases} \quad (18)$$

代入 $g(a, b, t)$ 积分得平均化方程

$$\begin{cases} \dot{a} = -\xi p_0 a + \frac{p_0^2 - \omega^2}{2\omega} b + \frac{3\eta}{8\omega} (a^2 + b^2) b - \frac{F \sin \alpha}{2\omega} \\ \dot{b} = -\xi p_0 b - \frac{p_0^2 - \omega^2}{2\omega} a - \frac{3\eta}{8\omega} (a^2 + b^2) a + \frac{F \cos \alpha}{2\omega} \end{cases} \quad (19)$$

方程(19)是谐波慢变参数的平均化方程.

2.2 谐波慢变参数的离散化映射

设

$$U(a, b) = -\xi p_0 a + \frac{p_0^2 - \omega^2}{2\omega} b + \frac{3\eta}{8\omega} (a^2 + b^2) b - \frac{F \sin \alpha}{2\omega} \quad (20)$$

$$V(a, b) = -\xi p_0 b - \frac{p_0^2 - \omega^2}{2\omega} a - \frac{3\eta}{8\omega} (a^2 + b^2) a + \frac{F \cos \alpha}{2\omega} \quad (21)$$

方程(19)可写成

$$\begin{cases} \dot{a} = U(a, b) \\ \dot{b} = V(a, b) \end{cases} \quad (22)$$

设方程(19)的平衡点为 (a_0, b_0) , 则有

$$\begin{cases} 0 = U(a_0, b_0) \\ 0 = V(a_0, b_0) \end{cases} \quad (23)$$

对方程(22)在 $[0, T]$ 内进行积分并利用 a 和 b 的缓变性质有

$$\begin{cases} a(T) - a(0) = \frac{2\pi}{\omega} U(a, b) \\ b(T) - b(0) = \frac{2\pi}{\omega} V(a, b) \end{cases} \quad (24)$$

将方程(24)中的 $U(a, b), V(a, b)$ 在点 (a_0, b_0) 附近作泰勒展开, 并利用方程(23)有

$$\begin{cases} a(T) - a(0) = \frac{2\pi}{\omega} \{A_{11} a(0) + A_{12} b(0) + E[a(0), b(0)]\} \\ b(T) - b(0) = \frac{2\pi}{\omega} \{A_{21} a(0) + A_{22} b(0) + G[a(0), b(0)]\} \end{cases} \quad (25)$$

方程中

$$A_{11} = \left. \frac{\partial U}{\partial a} \right|_{a=a_0, b=b_0} = -\xi p_0 + \frac{3\eta}{8\omega} 2a_0 b_0 \quad (26)$$

$$A_{12} = \left. \frac{\partial U}{\partial b} \right|_{a=a_0, b=b_0} = \frac{p_0^2 - \omega^2}{2\omega} + \frac{3\eta}{8\omega} (a_0^2 + 3b_0^2) \quad (27)$$

$$A_{21} = \left. \frac{\partial V}{\partial a} \right|_{\substack{a=a_0 \\ b=b_0}} = -\frac{p_0^2 - \omega^2}{2\omega} b_0 - \frac{3\eta}{8\omega} (3a_0^2 + b_0^2) \quad (28)$$

$$A_{22} = \left. \frac{\partial V}{\partial b} \right|_{\substack{a=a_0 \\ b=b_0}} = -\xi p_0 - \frac{3\eta}{8\omega} 2a_0 b_0 \quad (29)$$

$E[a(0), b(0)], G[a(0), b(0)]$ 为 $a(0), b(0)$ 的高阶项. 在点 (a_0, b_0) 附近, 方程(25)的高阶项可忽略不计, 则

$$\begin{bmatrix} a(T) \\ b(T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2\pi}{\omega} A_{11} + 1 & \frac{2\pi}{\omega} A_{12} \\ \frac{2\pi}{\omega} A_{21} & \frac{2\pi}{\omega} A_{22} + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a(0) \\ b(0) \end{bmatrix} \quad (30)$$

显然方程(30)是谐波慢变参数的离散映射多次迭代后的形式, 即

$$P[a(t), b(t)] = TP[a(0), b(0)] \quad (31)$$

比较方程(30)与方程(31)知

$$T = \begin{bmatrix} \frac{2\pi}{\omega} A_{11} + 1 & \frac{2\pi}{\omega} A_{12} \\ \frac{2\pi}{\omega} A_{21} & \frac{2\pi}{\omega} A_{22} + 1 \end{bmatrix} \quad (32)$$

式(32)是离散映射的雅可比矩阵.

2.3 产生混沌的解析预测

设 T 的特征值为 λ , 则

$$\begin{aligned} & \left(\frac{2\pi}{\omega} A_{11} + 1 - \lambda \right) \left(\frac{2\pi}{\omega} A_{22} + 1 - \lambda \right) - \\ & \left(\frac{2\pi}{\omega} \right)^2 A_{12} A_{21} = 0 \end{aligned} \quad (33)$$

由离散动力学理论知, 当 $\lambda_1 < 1 < \lambda_2$ 时, 谐波慢变参数的状态方程的奇点存在鞍点, 慢变参数 a 和 b 随时间才会出现混沌运动, 系统(9)的一次谐波才有可能是混沌运动, 即: 当 $\lambda_1 < 1 < \lambda_2$ 时, 系统(9)才有可能产生混沌. 由此可得到金属橡胶隔振器系统出现混沌的必要条件为

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} < 0 \quad (34)$$

将 $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$ 代入方程(34)化简后得

$$\begin{aligned} & (\xi p_0)^2 + \left(\frac{p_0^2 - \omega^2}{2\omega} \right)^2 + 4 \frac{3\eta}{8\omega} \frac{p_0^2 - \omega^2}{2\omega} \times \\ & (a_0^2 + b_0^2) + 3 \left(\frac{3\eta}{8\omega} \right)^2 (a_0^2 + b_0^2)^2 < 0 \end{aligned} \quad (35)$$

方程(35)是金属橡胶隔振器系统出现混沌时系统参数必须满足的条件. 方程(35)中含参数 $a_0^2 + b_0^2$, 为了消去 $a_0^2 + b_0^2$, 令 $r_0 = \sqrt{a_0^2 + b_0^2}$, $\tan \theta_0 = b_0/a_0$, 并代入方程(23)有

$$\begin{cases} 0 = -\xi p_0 r_0 \cos \theta_0 + \frac{p_0^2 - \omega^2}{2\omega} r_0 \sin \theta_0 + \\ \frac{3\eta}{8\omega} r_0^3 \sin \theta_0 - \frac{F \sin \alpha}{2\omega} \\ 0 = -\xi p_0 r_0 \sin \theta_0 - \frac{p_0^2 - \omega^2}{2\omega} r_0 \cos \theta_0 - \\ \frac{3\eta}{8\omega} r_0^3 \cos \theta_0 + \frac{F \cos \alpha}{2\omega} \end{cases} \quad (36)$$

消去 θ_0 , 并将 F 的表达式代入可得

$$\begin{aligned} & \left(\frac{p_0^2 - \omega^2}{2\omega} r_0 + \frac{3\eta}{8\omega} r_0^3 \right)^2 + (\xi p_0 r_0)^2 = \\ & \frac{(\omega^2 \mu_0)^2 + (Bk_z/m)^2}{4\omega^2} \end{aligned} \quad (37)$$

方程(37)为求 r_0 的方程. 将 $r_0 = \sqrt{a_0^2 + b_0^2}$ 代入方程(35)得金属橡胶隔振器系统出现混沌时系统参数必须满足的条件为

$$\begin{aligned} & (\xi p_0)^2 + \left(\frac{p_0^2 - \omega^2}{2\omega} \right)^2 + 4 \frac{3\eta}{8\omega} \times \\ & \frac{p_0^2 - \omega^2}{2\omega} r_0^2 + 3 \left(\frac{3\eta}{8\omega} \right)^2 r_0^4 < 0 \end{aligned} \quad (38)$$

方程中的 r_0 由方程(37)用系统参数给出.

由方程(38)可知, 要使方程(38)成立, 则必须有以下方程成立, 即

$$4 \frac{3\eta}{8\omega} \frac{p_0^2 - \omega^2}{2\omega} < 0 \quad (39)$$

求解上式, 将 p_0 的表达式代入可得

$$\omega > \sqrt{\frac{k + k_d}{m}} \quad (40)$$

由方程(40)可知, 只有当振动频率大于金属橡胶隔振系统的固有频率, 才产生混沌.

因此在考虑非线性因素的金属橡胶隔振系统设计时, 可以将金属橡胶隔振系统的参数代入方程(38)中进行混沌预测和判断, 以避免不利的混沌运动. 所以, 方程(38)为考虑非线性因素的金属橡胶隔振系统设计和隔振效果分析提供了理论依据.

3 结 论

本文在考虑金属橡胶隔振系统的非线性刚度和非线性迟滞恢复力的基础上, 建立了金属橡胶隔振器的非线性动力学方程. 根据非线性振动理论, 得出了系统在弱非线性情况下的一次谐波慢变参数的平均化方程; 推出了谐波慢变参数状态方程的离散化映射, 获得了金属橡胶隔振器出现混沌的解析条件; 得出了由于金属橡胶的迟滞恢复力的影响使金属橡胶隔振系统的主共振不是发

生在 $\omega = p_0 = \sqrt{k/m}$ 的地方,而是发生在 $\omega = p = \sqrt{(k+k_d)/m}$ 的地方,即使得金属橡胶隔振系统的固有频率向左移动,以及只有当振动频率大于金属橡胶隔振系统的固有频率,金属橡胶隔振系统才产生混沌等结论。

参考文献:

- [1] 敖宏瑞,姜洪源,闫辉,等. 单自由度金属橡胶隔振系统干摩擦阻尼的识别[J]. 机械设计, 2004, 21(4): 28-30.
AO Hongrui, JIANG Hongyuan, YAN Hui, et al. Recognition on dry frictional damping of metal rubber vibration isolation system with single degree of freedom[J]. Journal of Machine Design, 2004, 21(4): 28-30. (in Chinese)
- [2] 敖宏瑞,夏宇宏,姜洪源,等. 二维载荷作用对金属橡胶干摩擦阻尼性能的影响[J]. 机械设计与制造, 2002, 10(5): 72-74.
AO Hongrui, XIA Yuhong, JIANG Hongyuan, et al. The effect of tow-dimensional loading on the dry friction damping characteristics of metal rubber material[J]. Machinery Design & Manufacture, 2002, 10(5): 72-74. (in Chinese)
- [3] 闫晓军,李海燕,聂景旭. SMA 拟橡胶金属阻尼元件及其在减振中的应用[J]. 北京航空航天大学学报, 2003, 29(1): 72-75.
YAN Xiaojun, LI Haiyan, NIE Jingxu. SMA pseudo-rubber metal and its application in vibration control[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2003, 29(1): 72-75. (in Chinese)
- [4] 黄协清,张铁山,张俊华. 金属橡胶材料隔振特性研究[J]. 机械科学与技术, 2000, 19(6): 977-980.
HUANG Xieqing, ZHANG Tieshan, ZHANG Junhua. Research on vibration isolation characteristics of metal rubber material[J]. Mechanical Science and Technology, 2000, 19(6): 977-980. (in Chinese)
- [5] 姜洪源,董春芳,敖宏瑞,等. 航空发动机用金属橡胶隔振器动静态性能的研究[J]. 航空学报, 2004, 25(2): 140-142.
JIANG Hongyuan, DONG Chunfang, AO Hongrui, et al. Research on dynamic and static characteristics of metal rubber isolator used in aero-engine[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2004, 25(2): 140-142. (in Chinese)
- [6] 李宇明,郑坚,白鸿柏. 金属橡胶材料的动态力学模型[J]. 材料研究学报, 2003, 17(5): 499-504.
LI Yuming, ZHENG Jian, BAI Hongbai. Dynamic mechanics model of metal-rubber materials[J]. Chinese Journal of Materials Research, 2003, 17(5): 499-504. (in Chinese)
- [7] 敖宏瑞,姜洪源,夏宇宏. 金属橡胶弹性迟滞回线的一种新的建模方法[J]. 中国矿业大学学报, 2004, 33(4): 453-456.
AO Hongrui, JIANG Hongyuan, XIA Yuhong, et al. Simplified description method of elasto-hysteresis loop of metal rubber material[J]. Journal of China University of Mining & Technology, 2004, 33(4): 453-456. (in Chinese)
- [8] Iwan W D. The dynamic response of bilinear hysteretic system[D]. Lalifornia US: California Institute of Technology, 1961.
- [9] Sainsburg M G. Vibration analysis of damped complex structures[D]. London UK: University of London, 1976.
- [10] Ko J M, Ni Y Q, Tian Q L. Hyterestic behavior and empirical modeling of a wire-cable vibration isolator[J]. The International Journal of Analytical and Experimental Model Analysis, 1992, 7(2): 111-127.
- [11] 姜洪源,郝德刚,敖宏瑞. 环形金属橡胶隔振器系统建模与实验研究[J]. 湖南科技大学学报: 自然科学版, 2005, 20(1): 13-16.
JIANG Hongyuan, HAO Degang, AO Hongrui. Modeling and experimental research of ring-like metal rubber isolator system[J]. Journal of Hunan University of Science & Technology: Natural Science Edition, 2005, 20(1): 13-16. (in Chinese)
- [12] 郭宝亭,朱梓根,崔荣繁,等. 金属橡胶材料的理论模型研究[J]. 航空动力学报, 2004, 19(3): 314-319.
GUO Baoting, ZHU Zigen, CUI Rongfan, et al. Theoretical model of metal-rubber[J]. Journal of Aerospace Power, 2004, 19(3): 314-319. (in Chinese)
- [13] 姜洪源,敖宏瑞,李瑰贤. 金属橡胶隔振器动力学模型与分析[J]. 湖南科技大学学报: 自然科学版, 2003, 20(2): 14-17.
JIANG Hongyuan, AO Hongrui, LI Guixian. Modeling and analysis of dynamic characteristics of metal rubber isolator[J]. Journal of Hunan University of Science & Technology: Natural Science Edition, 2003, 20(2): 14-17. (in Chinese)
- [14] 李宇燕,黄协清,毛文雄. 金属橡胶三次非线性干摩擦系统振动响应计算方法研究[J]. 航空材料学报, 2004, 24(6): 56-60.
LI Yuyan, HUANG Xieqing, MAO Wenxiong. Investigation on the computational method of vibration response of dry friction system with cubic nonlinearity for metal rubber[J]. Journal of Aeronautical Materials, 2004, 24(6): 56-60. (in Chinese)
- [15] 李冬伟,白鸿柏,杨建春. 金属橡胶阻尼板简支结构性能实验研究[J]. 军械工程学院学报, 2003, 15(2): 6-10.
LI Dongwei, BAI Hongbai, YANG Jianchun, et al. Research on characters of metal rubber damping board simply-support structure[J]. Journal of Ordnance Engineering College, 2003, 15(2): 6-10. (in Chinese)
- [16] ZHOU Xiaobing, WU Yue, LI Yi. Hopf bifurcation analysis of the Liu system[J]. Chaos Solitons & Fractals, 2008, 36(1): 1385-1391.
- [17] Forinash K, Willis C R. Nonlinear response of the SG breather to an a. c. driver[J]. Physics D, 2001, 149(1): 95-106.
- [18] 刘曾荣. 混沌研究中的解析方法[M]. 上海: 上海大学出版社, 2002.
- [19] 朱志宇,蔡立勇,刘维亭. 基于 Melnikov 方法的电力系统

- 混沌振荡参数计算[J]. 电力系统及其自动化, 2008, 20(3): 42-45.
- ZHU Zhiyu, CAI Liyong, LIU Weiting. Computation of chaotic oscillation parameter in electrical power system based on Melnikov method[J]. Proceedings of the CSU-EPSCA, 2008, 20(3): 42-45. (in Chinese)
- [20] 牛玉俊, 徐伟, 戎海武. 非光滑周期扰动与有界噪声联合作用下受迫 Duffing 系统的混沌预测[J]. 物理学报, 2008, 57(12): 7535-7540.
- NIU Yujun, XU Wei, RONG Haiwu, et al. Chaos prediction in the Duffing-type system with non-smooth eriodic perturbation and bounded parametric excitation[J]. Acta Physica Sinica, 2008, 57(12): 7535-7540. (in Chinese)
- [21] 戎海武, 王向东, 徐伟, 等. 多频谱和与噪声作用下 Duffing 振子的安全盆侵蚀与混沌[J]. 应用力学学报, 2009, 26(2): 274-277.
- RONG Haiwu, WANG Xiangdong, XU Wei, et al. Bifurcations of safe basins and chaos in softening duffing oscillator under multi-frequency harmonic and hounded noise excitation[J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2009, 26(2): 274-277. (in Chinese)
- [22] 周纪卿, 朱因远. 非线性振动[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 1998: 247-248.
- [23] 程耀东. 机械振动[M]. 杭州: 浙江大学出版社, 1988: 46-48.
- [24] 李冬伟, 白鸿柏, 崔坤林, 等. 金属橡胶薄壁壳体件减振器阻尼性能分析[J]. 机械科学与技术, 2003(7): 173-177.
- LI Dongwei, BAI Hongbai, CUI Kunlin, et al. Research on the damping performance of the eggshell shock absorber made of metal rubber[J]. Mechanical Science and Technology, 2003(7): 173-177. (in Chinese)